第５講　微分法・積分法（数学Ⅲ），複素数平面

1 [1]　関数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ を微分すると，$f'(x)=$ ア であり，$f(x)=-f'(x)$ を満たす x の値は イ である.

[2]　曲線 $y=e^x$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ e^t)$ における接線 ℓ と法線 m が x 軸と交わる点をそれぞれ B, C とする．法線 m の方程式は ウ であり，△ABC の面積が 5 のとき，△ABC の外心の座標は エ である.

[3]　複素数 z は $z=\cos\dfrac{2}{7}\pi+i\sin\dfrac{2}{7}\pi$ であるとする．$z^7=$ オ であり，$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z=$ カ である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　正の実数 k について，関数 $f(x)=e^{-kx}+x$ がある．$f'(x)=0$ を満たす x は k の関数であり，この関数を $g(k)$ とする．

(1)　$g(k)$ を求めよ．

(2)　$g(k)$ の最大値 x_0 と，そのときの k の値 k_0 を求めよ．

(3)　$k=k_0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=x_0$，$x=1$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

[2]　関数 $f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{6}x-\dfrac{1}{2}$ を考える．

(1)　$f(1)$ を求めよ．

(2)　導関数 $f'(x)$ を求め，$f'(0)$ を計算せよ．

(3)　$0<x\leqq 3$ のとき，$f'(x)>0$ が成り立つことを示せ．

(4)　曲線 $y=f(x)$ $(0\leqq x<3)$ と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　座標平面で，曲線 $y=e^x$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=1$ とで囲まれた部分を D とする．

(1) D を座標平面に図示せよ．

(2) D を x 軸のまわりに１回転させてできる回転体の体積 V_0 を求めよ．

(3) D を直線 $y=1$ のまわりに１回転させてできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　微分法・積分法(数学Ⅲ)，複素数平面

[1]　関数 $f(x)=(\log x)^2-\log\left(\dfrac{1}{x}\right)^2$ を微分すると，$f'(x)=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{x}(\log x+\boxed{\text{イ}})$ であり，$f(x)-xf'(x)=0$ を満たす x の値は $x=e^{\pm\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}$ である．

[2]　複素数 $z=\cos\dfrac{2}{5}\pi+i\sin\dfrac{2}{5}\pi$ について，$z^5=\boxed{\text{エ}}$，$z^4+z^3+z^2+z+1=\boxed{\text{オ}}$ である．

[3]　a を実数として，関数 $f(x)=a\cos x-\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える．

(1)　$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$ となる a の値は $a=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である．また，このとき $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{3}$ である．

(2)　a の値を(1)のように定めるとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積 S は $S=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}-\log\boxed{\text{サ}}$ である．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　微分法・積分法（数学Ⅲ），複素数平面

1 ［1］ 関数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ を微分すると，$f'(x)=$ **ア** であり，$f(x)=-f'(x)$ を満たす x の値は **イ** である．

$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$　より

$$f'(x)=\frac{x'\cdot\sqrt{x-1}-x\cdot(\sqrt{x-1})'}{(\sqrt{x-1})^2}=\frac{\sqrt{x-1}-x\cdot\frac{1}{2}\cdot(x-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1}{x-1}$$

$$=\frac{2(x-1)-x}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{x-2}{2(x-1)\sqrt{x-1}}}\quad\cdots\cdots ア$$

$f(x)=-f'(x)$　より

$$\frac{x}{\sqrt{x-1}}=-\frac{x-2}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$$2x(x-1)=-x+2$$

$$2x^2-x-2=0$$

よって，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

$x-1>0$　より，

$$\boldsymbol{x=\frac{1+\sqrt{17}}{4}}\quad\cdots\cdots イ$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 [2]　曲線 $y=e^x$ 上の点 A$(t,\ e^t)$ における接線 ℓ と法線 m が x 軸と交わる点をそれぞれ B, C とする．法線 m の方程式は **ウ** であり，△ABC の面積が 5 のとき，△ABC の外心の座標は **エ** である．

$y=e^x$　より　$y'=e^x$

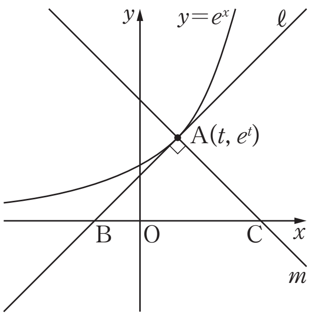
この曲線上の点を A$(t,\ e^t)$ とすると，点 A における接線 ℓ の方程式は

$y=e^t(x-t)+e^t$

この接線と x 軸との交点の x 座標は

$0=e^t(x-t)+e^t$　　$(x-t)+1=0$　　$x=t-1$

したがって　B$(t-1,\ 0)$



また，点 A における法線 m の方程式は

$y=-\dfrac{1}{e^t}(x-t)+e^t$　つまり

$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{e^t}x+\dfrac{t}{e^t}+e^t}$　……ウ

この法線と x 軸との交点の x 座標は

$0=-\dfrac{1}{e^t}(x-t)+e^t$　　$x-t=(e^t)^2$　　$x=e^{2t}+t$

したがって　C$(e^{2t}+t,\ 0)$

△ABC の面積が 5 のとき

$\dfrac{1}{2}\cdot\{(e^{2t}+t)-(t-1)\}\cdot e^t=5$

$(e^t)^3+e^t-10=0$

$(e^t-2)(e^{2t}+2e^t+5)=0$

よって　$e^t=2$　より　$t=\log 2$

したがって　B$(\log 2-1,\ 0)$，C$(\log 2+4,\ 0)$

$\angle$BAC$=90°$ より △ABC の外心は辺 BC の中点

よって外心の x 座標は　$\dfrac{(\log 2-1)+(\log 2+4)}{2}=\dfrac{2\log 2+3}{2}$

したがって外心の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{2\log 2+3}{2},\ 0\right)}$　……エ

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 ［3］　複素数 z は $z=\cos\frac{2}{7}\pi+i\sin\frac{2}{7}\pi$ であるとする．$z^7=$ **オ** であり，

$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z=$ **カ** である．

$$z^7=\left(\cos\frac{2}{7}\pi+i\sin\frac{2}{7}\pi\right)^7=\cos\left(\frac{2}{7}\pi\times7\right)+i\sin\left(\frac{2}{7}\pi\times7\right)$$

$$=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=\mathbf{1}\quad\cdots\cdots オ$$

よって　$z^7-1=0$　より

$$(z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0$$

$z\neq1$ より

$$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$$

したがって

$$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z=\mathbf{-1}\quad\cdots\cdots カ$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ 正の実数 k について，関数 $f(x)=e^{-kx}+x$ がある．$f'(x)=0$ を満たす x は k の関数であり，この関数を $g(k)$ とする．

(1) $g(k)$ を求めよ．

(2) $g(k)$ の最大値 x_0 と，そのときの k の値 k_0 を求めよ．

(3) $k=k_0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=x_0$，$x=1$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

(1) $f'(x)=-ke^{-kx}+1=0$　より　$e^{-kx}=\dfrac{1}{k}$

よって　$kx=\log k$　より　$x=\dfrac{\log k}{k}$

したがって　$\boldsymbol{g(k)=\dfrac{\log k}{k}}$

(2) $g'(k)=\dfrac{\dfrac{1}{k}\cdot k-\log k}{k^2}=\dfrac{1-\log k}{k^2}$

k	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$g'(k)$		$+$	0	$-$
$g(k)$		↗		↘

よって $g(k)$ の増減表は右図．

したがって　$g(k)$ は　$k=e$ のとき最大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる．

ゆえに　$\boldsymbol{x_0=\dfrac{1}{e}}$，$\boldsymbol{k_0=e}$

(3) $k=k_0=e$ のとき　$f(x)=e^{-ex}+x$

ここで　$f''(x)=e^2e^{-ex}>0$　より　$f''(x_0)>0$

したがって

　$x<x_0$ のとき，$f'(x)<0$

　$x>x_0$ のとき，$f'(x)>0$　　つまり　$f(x_0)$ は極小かつ最小

　$f(x_0)=e^{-e\times\frac{1}{e}}+\dfrac{1}{e}=\dfrac{2}{e}>0$

よって，つねに $f(x)>0$

したがって

$$S=\int_{\frac{1}{e}}^{1}(e^{-ex}+x)dx=\left[-\frac{1}{e}e^{-ex}+\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{1}{e}}^{1}$$

$$=-\frac{1}{e}\cdot e^{-e}+\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{e}\cdot e^{-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^2}\right)$$

$$=-e^{-e-1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^2}-\frac{1}{2e^2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}+\frac{1}{2e^2}-e^{-e-1}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［2］ 関数 $f(x)=x\sin\frac{\pi}{6}x-\frac{1}{2}$ を考える．

(1) $f(1)$ を求めよ．

(2) 導関数 $f'(x)$ を求め，$f'(0)$ を計算せよ．

(3) $0<x\leqq 3$ のとき，$f'(x)>0$ が成り立つことを示せ．

(4) 曲線 $y=f(x)$ $(0\leqq x<3)$ と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(1) $f(1)=\sin\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\mathbf{0}$

(2) $f'(x)=1\cdot\sin\frac{\pi}{6}x+x\cdot\cos\frac{\pi}{6}x\cdot\frac{\pi}{6}=\boldsymbol{\sin\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{6}x\cos\frac{\pi}{6}x}$

よって　$f'(0)=\mathbf{0}$

(3) $0<x\leqq 3$ のとき　$0<\frac{\pi}{6}x\leqq\frac{\pi}{2}$

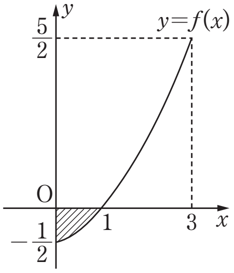
よって　$\sin\frac{\pi}{6}x>0$，$\cos\frac{\pi}{6}x\geqq 0$ より　$f'(x)>0$

(4) (3)より $0<x<3$ において $f(x)$ は単調増加

また，$f(0)=-\frac{1}{2}$，$f(3)=\frac{5}{2}$

(1)より $f(1)=0$，(2)より $f'(0)=0$

したがって，$0\leqq x<3$ における $y=f(x)$ のグラフの概形は右図．



よって求める面積 S は

$$S=\int_0^1\{-f(x)\}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x\sin\frac{\pi}{6}x\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}-\int_0^1 x\sin\frac{\pi}{6}x\,dx$$

ここで　$\int x\sin\frac{\pi}{6}x\,dx=x\cdot\left(-\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi}{6}x\right)-\int 1\cdot\left(-\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi}{6}x\right)dx$

$$=-\frac{6}{\pi}x\cos\frac{\pi}{6}x+\left(\frac{6}{\pi}\right)^2\sin\frac{\pi}{6}x+C$$

より

$$\int_0^1 x\sin\frac{\pi}{6}x\,dx=-\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi}{6}+\left(\frac{6}{\pi}\right)^2\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}+\frac{18}{\pi^2}$$

したがって

$$\boldsymbol{S=\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{\pi}-\frac{18}{\pi^2}}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

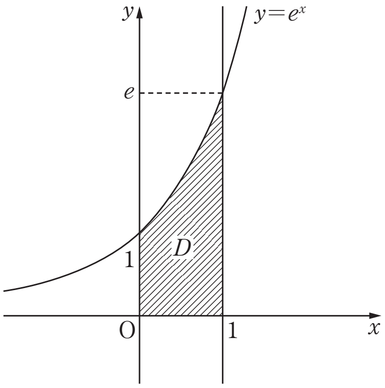
3　座標平面で，曲線 $y=e^x$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=1$ とで囲まれた部分を D とする．

(1)　D を座標平面に図示せよ．

(2)　D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V_0 を求めよ．

(3)　D を直線 $y=1$ のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

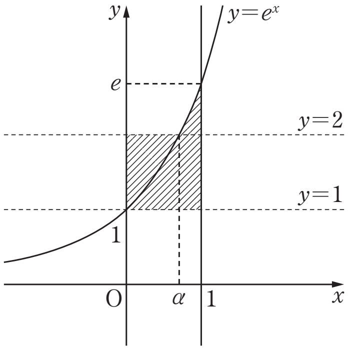
(1)



上図斜線部分（境界含む）

(2)　$V_0=\int_0^1 \pi y^2\,dx=\pi\int_0^1 e^{2x}\,dx=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}(e^2-1)}$

(3)　D の $y=1$ より下の部分を $y=1$ に関して対称に折り返すと，右図の斜線部分となる．求める体積は，右図斜線部分を $y=1$ のまわりに 1 回転させてできる図形の体積である．



$y=e^x$ と $y=2$ の交点の x 座標は $e^x=2$ より $x=\log 2$

これを α とすると，$e^{\alpha}=2$　……①

$$V_1=\pi\cdot 1^2\cdot\alpha+\pi\int_\alpha^1 (y-1)^2\,dx$$

$$\frac{V_1}{\pi}=\alpha+\int_\alpha^1 (e^x-1)^2\,dx=\alpha+\int_\alpha^1 (e^{2x}-2e^x+1)\,dx$$

$$=\alpha+\left[\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x+x\right]_\alpha^1$$

$$=\alpha+\left(\frac{1}{2}e^2-2e+1\right)-\left(\frac{1}{2}e^{2\alpha}-2e^{\alpha}+\alpha\right)=\frac{1}{2}e^2-2e+1-\frac{1}{2}e^{2\alpha}+2e^{\alpha}$$

ここで①より　$e^{2\alpha}=2^2=4$

よって

$$\frac{V_1}{\pi}=\frac{1}{2}e^2-2e+1-\frac{1}{2}\cdot 4+2\cdot 2=\frac{1}{2}e^2-2e+3$$

したがって，$\boldsymbol{V_1=\left(\frac{1}{2}e^2-2e+3\right)\pi}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　微分法・積分法(数学Ⅲ)，複素数平面

[1]　関数 $f(x)=(\log x)^2-\log\left(\frac{1}{x}\right)^2$ を微分すると，$f'(x)=\dfrac{\boxed{ア}}{x}(\log x+\boxed{イ})$ であり，$f(x)-xf'(x)=0$ を満たす x の値は $x=e^{\pm\sqrt{\boxed{ウ}}}$ である．

[2]　複素数 $z=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi$ について，$z^5=\boxed{エ}$，$z^4+z^3+z^2+z+1=\boxed{オ}$ である．

[3]　a を実数として，関数 $f(x)=a\cos x-\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ を考える．

(1)　$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$ となる a の値は $a=\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ である．また，このとき

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{\boxed{ク}}}{3}$ である．

(2)　a の値を(1)のように定めるとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積 S は $S=\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}-\log\boxed{サ}$ である．

解答例

[1]　$f(x)=(\log x)^2-\log x^{-2}$　より

$$f'(x)=2(\log x)\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x^{-2}}\cdot(-2x^{-3})$$

$$=\frac{2}{x}\log x+\frac{2}{x}=\frac{\mathbf{2}}{x}(\log x+\mathbf{1})$$

$f(x)-xf'(x)=0$　より　$(\log x)^2-\log x^{-2}-2(\log x+1)=0$

$(\log x)^2+2\log x-2\log x-2=0$

$(\log x)^2=2$

$\log x=\pm\sqrt{2}$

よって　$x=e^{\pm\sqrt{2}}$

[2]　$z=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi$　より

$$z^5=\left(\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi\right)^5$$

$$=\cos\left(\frac{2}{5}\pi\times5\right)+i\sin\left(\frac{2}{5}\pi\times5\right)$$

$$=\cos2\pi+i\sin2\pi=\mathbf{1}$$

$z^5=1$　より

$z^5-1=0$

$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$z \neq 1$　より

$z^4+z^3+z^2+z+1=\mathbf{0}$

［3］(1)　$f(x)=a\cos x-\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$　より

$$f'(x)=-a\sin x-\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

$$=-a\sin x+\frac{1+\sin x}{(1+\sin x)^2}$$

$$=-a\sin x+\frac{1}{1+\sin x}$$

$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$　より　$-a\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}=0$　　よって　$a=\mathbf{\dfrac{4}{3}}$

このとき　$f(x)=\dfrac{4}{3}\cos x-\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$　より

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{1+\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

(2)　$f'(x)=-\dfrac{4}{3}\sin x+\dfrac{1}{1+\sin x}$

$$=\frac{-4\sin x(1+\sin x)+3}{3(1+\sin x)}$$

$$=-\frac{(2\sin x+3)(2\sin x-1)}{3(1+\sin x)}$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における増減表は右図.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		＋	0	－	
$f(x)$		↗		↘	

$f(0)=\dfrac{1}{3}>0$,　$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

よって求める面積 S は

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{4}{3}\cos x-\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{4}{3}\cos x-\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x}\right\}dx$$

$$=\left[\frac{4}{3}\sin x-\log(1+\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathbf{\frac{4}{3}-\log 2}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。